DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 h 15

---

p est un entier donné, strictement positif. On pose : $2^p = N$.

f, g, s et t sont des variables entières, susceptibles de prendre les N valeurs : 1, 2, ..., N−1, N. Les opérations portant sur les indices comme sur les exposants seront les opérations usuelles des indices ou des exposants.

E est l'ensemble des éléments formés d'une suite ordonnée de N composantes valant 0 ou 1 :

$$a \in E : \ a = (a_1, a_2, \ldots, a_t, \ldots, a_N), \quad a_t = 0 \text{ ou } 1, \ t = 1, 2, \ldots, N.$$

On pose :

$$\underline{0} \in E : \ \underline{0} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$$

et :

$$v \in E : \ v = (1, 1, \ldots, 1, \ldots, 1).$$

I

1° On définit sur E une loi de composition qui, aux éléments quelconques a et b de E, fait correspondre l'élément noté $a + b$, défini par ses N composantes :

$$(a_1 + b_1, \ a_2 + b_2, \ \ldots, a_t + b_t, \ \ldots, a_N + b_N),$$

composantes dans lesquelles le signe $+$ symbolise l'addition modulo 2 (en abrégé : mod 2).

Vérifier brièvement que E est structuré en espace vectoriel sur le corps des scalaires 0 et 1. On précisera l'opposé d'un élément quelconque de E.

2° On définit sur E une autre loi de composition qui, aux éléments quelconques a et b de E, fait correspondre l'élément noté ab, défini par ses N composantes :

$$(ab)_1 = 0, \quad (ab)_t = \sum_{s=1}^{t-1} a_{t-s}\, b_s \pmod 2, \quad t = 2, 3, \ldots, N,$$

où le produit : $a_{t-s}\, b_s$ est un produit ordinaire.

Montrer que cette loi est commutative. Possède-t-elle un élément neutre?

Montrer que tout élément de E possède au moins un diviseur de $\underline{0}$. Vérifier brièvement que cette loi achève de structurer E en algèbre. (*On rappelle que la loi notée multiplicativement d'une algèbre peut être ni associative, ni commutative, et ne pas posséder d'élément neutre.*)

3° On note v^f (avec $v^1 = v$), la puissance f-ième de v, et : $v_t^f = (v^f)_t$, sa t-ième composante.

Montrer que : $v_1^f = 0$, pour : $f = 2, 3, \ldots, N$; et exprimer v_t^f en fonction de v_{t-1}^f et de v_{t-1}^{f-1}, pour : f et $t = 2, 3, \ldots, N$.

Quelles propriétés en déduit-on pour la matrice V de terme général v_t^f ?

Application. — Construire la matrice V pour $p = 3$.

4° Montrer que le système S formé des éléments : $v, v^2, \ldots, v^f, \ldots, v^N$ est une base de E.

Quelle propriété en déduit-on pour la matrice V?

5° Montrer que :

$$v_t^f = v_{N+1-f}^{N+1-t}.$$

Qu'en déduit-on pour la matrice V?

II

Pour tout $a \in E$, on pose :

$$a_t = \sum_{f=1}^{N} c_f\, v_t^f \pmod 2, \quad t = 1, 2, \ldots, N,$$

(où les c_f sont des coefficients valant 0 ou 1), et on définit le conjugué $\bar{a}$ de a par ses N composantes :

$$\bar{a}_t = \sum_{f=1}^{N} c_f\, v_f^t \pmod 2, \quad t = 1, 2, \ldots, N. \qquad .../...$$

M 94 E.N.S.I. DE CHIMIE Groupe "CENTRE" 1978

On définit, de plus, sur E la forme bilinéaire :

$$\forall a \in E, \quad \forall b \in E : \langle a, b \rangle = \sum_{s=1}^{N} a_s \bar{b}_s \pmod 2 .$$

1° Montrer que dans E muni de cette forme, S est une base orthonormale :

$\langle v^f, v^g \rangle = 0$, si $f \neq g$; et $= 1$, si $f = g$; f et $g = 1, 2, \ldots, N$.

2° Montrer que S est clos dans E, c'est-à-dire montrer que :

$a \in E$, $\langle a, v^f \rangle = 0$, pour : $f = 1, 2, \ldots, N$, entraîne : $a = \underline{0}$.

3° $\forall a \in E$, le scalaire $\langle a, a \rangle$ pourrait-il définir une norme de a?

III

On considère l'opérateur linéaire F qui, à l'élément quelconque $a \in E$, fait correspondre l'élément noté $F(a) \in E$, défini par ses N composantes :

$$F(a)_f = \langle a, v^f \rangle, \quad f = 1, 2, \ldots, N.$$

1° Exprimer F (F (a)) en fonction de a. Conclusion?

2° Montrer que, $\forall a \in E$, $\forall b \in E$:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{f=1}^{N} F(a)_f \; F(b)_f \pmod 2 .$$

3° Montrer que, $\forall a \in E$, $\forall b \in E$:

$$F(ab) = F(a) F(b) .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail